Ασκήσεις

1) Έστω $\varphi_i : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$, $i=1,2,3,4$ με

$$\varphi_1(A) = \begin{cases} 0, & A=\emptyset \\ 1, & A\neq\emptyset \end{cases}, \quad \varphi_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμ.} \\ 1, & \text{αν } A \text{ υπεραριθ.} \end{cases}$$

για κάθε $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, και

$$\varphi_3(A) = (+\infty)\varphi_1 \quad \text{και} \quad \varphi_4 = (+\infty)\varphi_2$$

Να βρεθεί η σ-άλγεβρα των μετρήσιμων συνόλων $\mathcal{M}_{\varphi_i}$

Λύση

$B \in \mathcal{M}_{\varphi_i} \Leftrightarrow \varphi_i(A) \geq \varphi_i(A\cap B) + \varphi_i(A\cap B^c)$, $\forall A \subset \mathbb{R}$ (*)

Ας υποθέσουμε ότι $\varphi_i(A) < +\infty$

• $i=1$: Προφανώς $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}_{\varphi_1}$ και αυτά είναι τα μόνα στοιχεία της $\mathcal{M}_{\varphi_1}$. Δηλαδή, $\mathcal{M}_{\varphi_1} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

ώστε $B \subset \mathbb{R}$ και $\emptyset \neq B \neq \mathbb{R}$ και θδο $B \notin \mathcal{M}_{\varphi_1}$

Επιλέγουμε $\alpha \in B$ και $b \in \mathbb{R} \setminus B$

Θεωρώ λοιπόν $A := \{a, b\}$ τότε η $(*)$: $1 \geq 1+1$ (άτοπο)

Άρα $B \notin \mathcal{M}_{\varphi_1} \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\varphi_1} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

- **$i=2$**: Θδο $\mathcal{M}_{\varphi_2} = \{B \subset \mathbb{R} : B$ αριθμήσιμο ή $\mathbb{R} \setminus B$ αριθμ.$\}$

Αν B αριθμήσιμο τότε $\forall A \subset \mathbb{R}$: $A \cap B$ αριθμήσιμο τότε $\varphi_2(A \cap B) = 0$ και άρα η $(*)$ ισχύει

Αν $\mathbb{R} \setminus B$ αριθμήσιμο τότε $\forall A \subset \mathbb{R}$: $A \setminus B$ αριθμήσιμο τότε $\varphi_2(A \setminus B) = 0$ και άρα η $(*)$ ισχύει

Αν $B \subset \mathbb{R}$ ώστε B και $\mathbb{R} \setminus B$ υπεραριθμήσιμα και θδο $B \notin \mathcal{M}_\varphi$. Όμως για $A := \mathbb{R}$ η $(*)$ γράφεται $1 \geq 1+1$ (άτοπο). Συνεπώς, $B \notin \mathcal{M}_{\varphi_2}$

Σχόλιο: Προφανώς $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ εξωτερικά μέτρα και ειδικότερα φ_3, φ_4 είναι και μέτρα στον $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ και άρα $\mathcal{M}_{\varphi_3} = \mathcal{M}_{\varphi_4} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$

2) Για ένα $A \subset \mathbb{R}^k$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$

ii) $\exists F_\sigma$ σύνολο B και $\exists C \subset \mathbb{R}^k$: $\lambda(C) = 0$ ώστε $A = B \cup C$

iii) $\exists F_\sigma$ σύνολο D ώστε $\lambda(A \triangle D) = 0$.

όπου $A \triangle D := (A \setminus D) \cup (D \setminus A)$ (συμμετρική διαφορά)

Λύση

i) ⇒ ii) Υποθέτουμε ότι $\lambda(A) < +\infty$

Γενικά, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\lambda(A_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε, $A_n = B_n \cup C_n$ όπου B_n είναι F_σ και $\lambda(C_n) = 0$, $\forall n$

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)$ όπου $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in F_\sigma$ & $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = 0$

Εφόσον $\lambda(A) = \sup\{\lambda(F) : F$ συμπαγές, $F \subset A\}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$\exists F_n \subset A$ συμπαγές (άρα κλειστό $\subset \mathbb{R}^k$)

ώστε $\lambda(F_n) > \lambda(A_n) - \frac{1}{n}$

Θέτουμε $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και για $C = A \setminus B$

Τότε B είναι F_σ σύνολο, $\lambda(B) \geq \lambda(F_n) \geq \lambda(A) - \frac{1}{n}$ $\forall n$

άρα όταν το $n \to \infty$, $\left.\begin{array}{l}\lambda(B) \geq \lambda(A) \\ \text{Αλλά } B \subset A \Rightarrow \lambda(B) \leq \lambda(A)\end{array}\right\} \lambda(B) = \lambda(A)$

Άρα, $\lambda(A) - \lambda(B) = 0 \Leftrightarrow \lambda(A \setminus B) = \lambda(C) = 0$

και προφανώς $A = B \cup C$

ii) $\Rightarrow$ iii) Για $D = B$ ισχύει

iii) $\Rightarrow$ i) Αν $A = (D \setminus (D \setminus A)) \cup (A \setminus D)$ οπου D είναι F_σ

άρα $D \in \mathcal{M}_\lambda^*$ και $A \setminus D$, $D \setminus A$ είναι μέτρου 0.

Άρα, $A \setminus D$, $D \setminus A \in \mathcal{M}_\lambda^*$

Επομένως $A \in \mathcal{M}_\lambda^*$

3) Εστω $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ ώστε $\forall t \in \mathbb{R}$ με $|t| < \delta$ ισχύει $a + t \in A$ ή $a - t \in A$. Ν.δ.ο $\lambda^*(A) \geq \delta$

__Λύση__

$(-\delta, \delta) \subset (A - a) \cup (a - A)$

$\lambda^*(-\delta, \delta) \leq \lambda^*((A-a) \cup (a-A))$

$2\delta \leq \lambda^*(A-a) + \lambda^*(a-A)$

$2\delta \leq \lambda^*(A) + \underbrace{\lambda^*(-A)}_{\lambda^*(A)}$

$2\delta \leq 2\lambda^*(A)$

$\delta \leq \lambda^*(A)$

4) Θεωρούμε $A \subset \mathbb{R}$ και $0 < a < 1$ έτσι ώστε να ισχύει:

$\lambda^*(A \cap I) \leq a \cdot \lambda(I)$, $\forall I$ διάστημα

Ν.δ.ο $\lambda^*(A) = 0$

__Λύση__

Εστω $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία ανοιχτών & φραγμ. διαστημάτων ώστε $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

Απο υπόθεση $\lambda^*(A \cap I_n) \leq a\,\lambda(I_n)$, $\forall n$

Τότε $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A\cap I_n) \leq a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)$, $\forall I_n$

Τότε $\lambda^*(A) \leq a \cdot \lambda^*(A)$

Τότε $\lambda^*(A) = +\infty$ ή 0

Θα αποκλίσουμε το ενδεχόμενο $\lambda^*(A) < +\infty$

Έστω J φραγμένο διάστημα $\Rightarrow \lambda^*(A\cap J\cap I) \leq a \cdot \lambda(J\cap I) \leq$
$\leq \alpha \lambda(I)$, $\forall I$ διάστημα

Εφόσον $\lambda^*(A\cap J) < +\infty$ από τα προηγούμενα
έπεται ότι $\lambda^*(A\cap J) = +\infty$, $\forall J$ φραγ. διάστημα

Αφού $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A\cap(-n,n))$ όπου $\lambda^*(A\cap(-n,n)) = 0$

Άρα, $\lambda^*(A) = 0$

5) Έστω $f: [a,\beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση
Νδο $\lambda(G_f) = 0$

__Λύση__

Έστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον η $f: [a,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow f$ ομοιομ. συνεχής

Άρα, $\exists \delta > 0$ ώστε $\forall x,y \in [a,\beta]$: $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{\beta - a}$

Θεωρώ τη διαμέριση:
$t_0 = a < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$ ώστε $t_i - t_{i-1} < \delta$
για $i = 1,2,\ldots,n$

Για κάθε $i = 1,\ldots,n$ η f συνεχής στο $[a,\beta] \Rightarrow$
$\exists$ min, max της f στο $[t_{i-1}, t_i]$

Άρα, $\exists \gamma_i, \delta_i \in [t_{i-1}, t_i]$: $f(\gamma_i) \leq f(t) \leq f(\delta_i)$, $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$

Έτσι, $|\delta_i - \gamma_i| \leq t_i - t_{i-1} < \delta$ και άρα
$f(\delta_i) - f(\gamma_i) < \varepsilon/\beta - a$

Συνεπώς, $G_f \subset \bigcup_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i] \times [f(\gamma_i), f(\delta_i)]$

$$\lambda^*(G_f) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda^*([t_{i-1},t_i] \times [f(\gamma_i), f(\delta_i)]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left((t_i - t_{i-1}) \cdot (f(\delta_i) - f(\gamma_i)) \right) < \sum_{n=1}^{\infty} (t_i - t_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{(\beta - a)} =$$

$$= (\beta - a) \frac{\varepsilon}{(\beta - a)} = \varepsilon \Rightarrow \lambda^*(G_f) < \varepsilon \to 0$$

6) Αν $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ συνεχής
Νδο $\lambda^*(G_f)=0$

Λύση

$$(\alpha,\beta)=\bigcup_{n=n_0}^{\infty}\left[\alpha+\frac{1}{n},\beta-\frac{1}{n}\right]$$

Έτσι, αν $f_n = f\big|_{[\alpha+\frac{1}{n},\beta-\frac{1}{n}]}$ $\forall n\geq n_0$

Από άσκηση 5 $\lambda^*(G_{f_n})=0$, $\forall n\geq n_0$
Άλλα, $G_f=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_{f_n}$
Άρα, $\lambda(G_f)=0$

7) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής
Νδο $\lambda^*(G_f)=0$

Λύση

$\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]$

$f_n := f\big|_{[-n,n]}$
$G_f=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_{f_n}$
όμοια με την 6

8) (Θέμα)
Δίνεται το σύνολο
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{Q} \text{ ή } y\in\mathbb{Q}\}$.
Νδο $\lambda^*(A)=0$

Λύση

Το $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο $\Rightarrow \lambda^*(\mathbb{Q})=0$
$A=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_{q_n}\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_{q_n}\right)\longrightarrow\lambda^*(A)=0.$

όπου $B_a=\mathbb{R}\times\{a\}\to\lambda^*(B_a)=0$
$C_a=\{a\}\times\mathbb{R}\to\lambda^*(C_a)=0$

9) (Βασική)

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου

Τ.Α.Ε.Ι

i) Το σύνολο τιμών του μ δηλ. το $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι άπειρο σύνολο

ii) $\forall \varepsilon > 0$ Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$: $0 < \mu(A) < \varepsilon$

iii) $\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ξένα ανά δύο στην $\mathcal{A}$: $\mu(A_n) > 0$, $\forall n$

Λύση

i) ⇒ iii) : Για $A \in \mathcal{A}$

Θέταμε $R_A := \{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\}$

Ισχυρισμός: αν $A \in \mathcal{A}$ και R_A άπειρο και $B \subset A$ τότε είτε το R_B είτε το $R_{A \setminus B}$ θα είναι άπειρο

Αποδ

Αν $C \in \mathcal{A}$ με $C \subset A$

$$\mu(C) = \mu(\underset{\underset{R_B}{\uparrow}}{C \cap B}) + \mu(\underset{\underset{R_{A-B}}{\uparrow}}{C \setminus B})$$

$R_A \subset R_B + R_{A \setminus B}$ έπεται το σχπέρασμα

Από τον ισχυρισμό κατασκευάζαμε επαγωγικά μια ακολουθία $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν $\mathcal{A}$ με $(\mu(B_n))$ ↘, $\mu(B_n) > 0$, $\forall n$ και R_{B_n} άπειρο

Θέτουμε $B_1 = X$

Έστωσαν τα $B_1, \dots, B_n$ να έχουν οριστεί

Αφού R_{B_n} άπειρο $\exists C \in \mathcal{A}$ με $C \subset B_n$ ώστε $0 < \mu(C) < \mu(B_n)$

Από τον ισχυρισμό R_C ή $R_{B_n \setminus C}$ άπειρο

Ορίζουμε $B_{n+1} := \begin{cases} C, & R_C \text{ άπειρο} \\ B_n \setminus C, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Θέταμε $A_n := B_n \setminus B_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ξένα ανά δύο

$\mu(A_n) = \mu(B_n) - \mu(B_{n+1}) > 0$

iii) ⇒ ii) : $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty \Rightarrow \mu(A_n) > 0$, $\forall n$

ii) ⇒ i) Επιλέγουμε μια $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν $\mathcal{A}$ με $\mu(A_n) > \mu(A_{n+1}) > 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος
Μια συνάρτηση $f: X \to [-\infty, +\infty]$ λέγεται μετρήσιμη ως προς $\mathcal{A}$ ή αλλιώς $\mathcal{A}$-μετρήσιμη αν $[f \leq \beta] = f^{-1}([-\infty, \beta]) \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$

Αν μ μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ η f θα λέγεται μ-μετρήσιμη αν είναι $\mathcal{A}_\mu$-μετρήσιμη

Ειδικότερα μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^k \to [-\infty, +\infty]$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμη αν είναι λ-μετρήσιμη.

Αν X μετρικός χώρος μια συνάρτηση $f: X \to [-\infty, +\infty]$ λέγεται Borel μετρήσιμη αν είναι $\mathcal{B}(X)$-μετρήσιμη.

Πρόταση
Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f: X \to [-\infty, +\infty]$
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
i) η f μετρήσιμη
ii) $[f < \beta] = f^{-1}([-\infty, \beta)) \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$
iii) $[f \geq \beta] = f^{-1}([\beta, +\infty]) \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$
iv) $[f > \beta] = f^{-1}((\beta, +\infty]) \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

i) → ii): $[f < \beta] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f \leq \beta - \frac{1}{n}] \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$

ii) → iii): $[f \geq \beta] = [f < \beta]^c \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$

iii) → iv) $[f > \beta] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f \geq \beta + \frac{1}{n}] \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$

iv) → i) $[f \leq \beta] = [f > \beta]^c \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$

Παραδείγματα:

i) Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $B\subset X$ και

$$\chi_B(x)=\begin{cases}1 & ,x\in B\\ 0 & ,x\in X\setminus B\end{cases}$$

$$[\chi_B\leq\beta]=\begin{cases}\emptyset & ,\beta<0\\ X\setminus B & ,0\leq\beta<1\\ X & ,\beta\geq 1\end{cases}$$

Έτσι, $B\in\mathcal{A}\Leftrightarrow\chi_B$ μετρήσιμη

ii) Αν $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ τότε

$$f \text{ συνεχής} \xRightarrow{(\alpha)} f \text{ Borel μετρήσιμη} \xRightarrow{(\beta)} f \text{ Lebesgue μετρήσιμη}$$

α. $\forall\beta\in\mathbb{R}$: $[f\leq\beta]$: κλειστό ως αντίστροφη εικόνα του κλειστού $(-\infty,\beta]$ μέσω της συνεχούς f άρα $[f\leq\beta]\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

β. $\forall\beta\in\mathbb{R}$: $[f\leq\beta]\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\subset\mathcal{M}_{\lambda^*}$

iii. Αν I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f:I\to\mathbb{R}$ ↑ τότε f είναι Borel-μετρήσιμη

Έστω $\beta\in\mathbb{R}$.
Επίσης $\alpha=\sup[f\leq\beta]$ τότε $[f\leq\beta]=I\cap(-\infty,\alpha)$ ή $I\cap(-\infty,\alpha]$ και άρα $[f\leq\beta]\in\mathcal{B}(I)$ $\forall\beta\in\mathbb{R}$.
Άρα, f Borel-μετρήσιμη.

Ορισμός: Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $C\subseteq X$. Η οικογένεια $\mathcal{A}_C=\{A\cap C : A\in\mathcal{A}\}$ λέγεται ίχνος της $\mathcal{A}$ στο C. Αυτή είναι πάντα σ-άλγεβρα και επίσης $f:C\to[-\infty,+\infty]$ λέγεται μετρήσιμη αν είναι $\mathcal{A}_C$-μετρήσιμη (δηλ. $[f\leq\beta]\in\mathcal{A}$, $\forall\beta\in\mathbb{R}$)

Αν $\tau \in \mathcal{A}$ τότε $\mathcal{A}_\tau = \{B \in \mathcal{A} : B \subset \tau\}$

Έτσι, f μετρήσιμη ανν $[f \leq \beta] \in \mathcal{A}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.